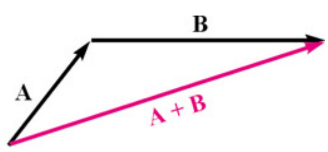
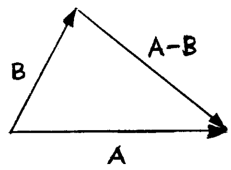
제 1 장 벡터 수학

1. 1/1.2 벡터의 기초

벡터의 표기 : $\mathbf{A}$, $\underline{A}$, $\overline{A}$

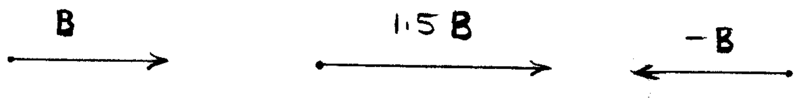
벡터의 합과 차 :





벡터 $\mathbf{B}$ 의 크기 표기 : $|\mathbf{B}|$, B , $\|\mathbf{B}\|$

벡터와 스케일러의 곱 : $\mathbf{A} = k\mathbf{B}$



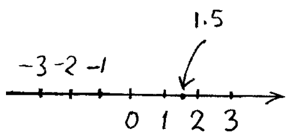
벡터 $\mathbf{B}$ 의 단위벡터 :

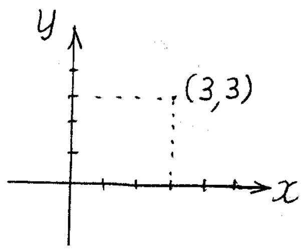
방향은 벡터 $\mathbf{B}$ 의 방향과 동일. 크기는 1. 표기는 $\mathbf{a}_B$ 또는 $\hat{\mathbf{B}}$.

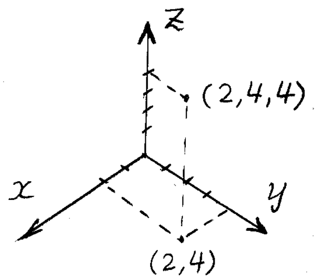
$$\boxed{\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \hat{\mathbf{B}} \quad ; \quad \mathbf{B} = B\hat{\mathbf{B}}}$$

1. 3 직각 좌표계

– 직각좌표계 (rectangular coordinate system = Cartesian coordinate system)

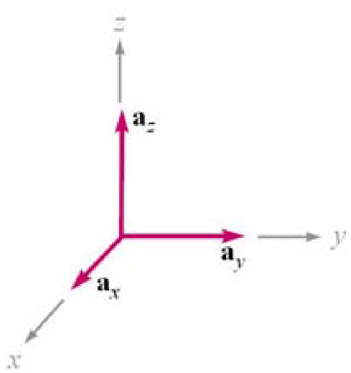


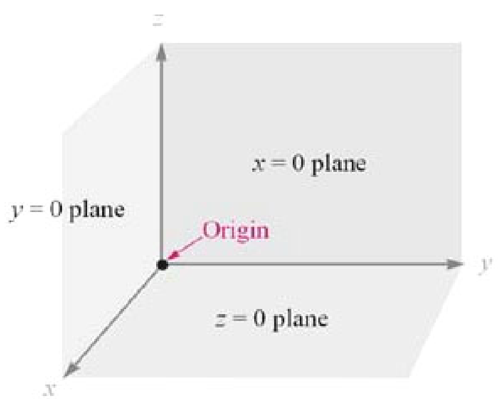




– 기본벡터 (base vector) : $(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z)$, $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 등으로 표기.

오른손 법칙 적용 -> $\hat{\mathbf{x}}$ 축에서 $\hat{\mathbf{y}}$ 축 방향으로 회전시 오른 나사가 진행하는 방향이 $\hat{\mathbf{z}}$ 축.





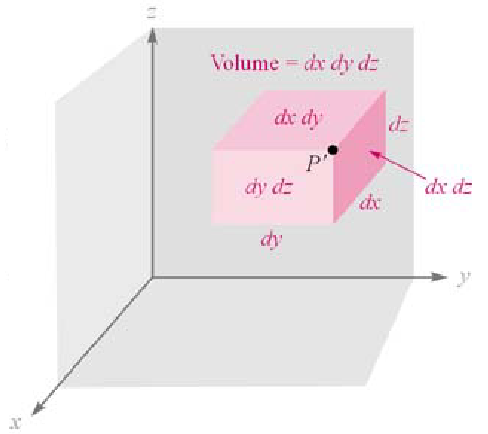
- 좌표면 (coordinate surface) : 서로 직교하는 3 개의 평면

  $x=0$ 평면 : yz 평면이라고도 함.

  $y=0$ 평면 : zx 평면이라고도 함.

  $z=0$ 평면 : xy 평면이라고도 함.

- 직각 좌표계의 점 : 임의의 점의 좌표가 (x,y,z) 일 때 이 점은 $x=x$ 인 평면, $y=y$ 인 평면, $z=z$ 인 평면의 교점이다. 원점에서 x 축 방향으로 x 만큼, y 축 방향으로 y 만큼, z 축 방향으로 z 만큼 이동한 점이다.



직각좌표계에서의 변화량(differential)

$P(x,y,z)$, $P'(x+dx,y+dy,z+dz)$: 좌표점

$\boxed{dS_z = dxdy,\ dS_y = dzdx,\ dS_x = dydz}$: 극소면적

$\boxed{dV = dxdydz}$: 극소 체적 (differential volume)

$\boxed{dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$: 극소 길이 (differential length)

직각 좌표계를 이용한 벡터 표시

위치 벡터 : 표원점으로부터 공간상의 점 $P(x,y,z)$ 으로 향하는 벡터. 표기는 다음과 같이 한다.

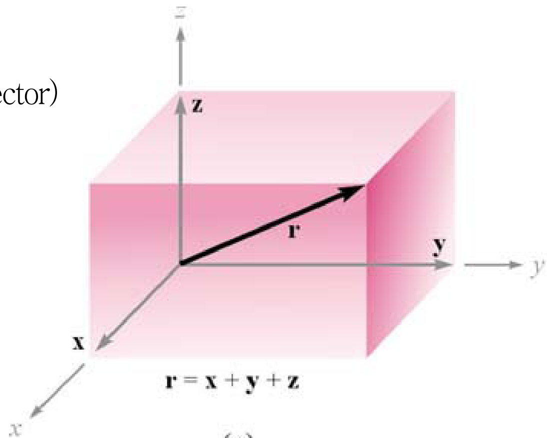
$\boxed{\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}$

$\boxed{\mathbf{r} = <x,y,z>}$: 벡터의 성분표시 (component form of a vector)

임의의 벡터 :

$\boxed{\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}}$

A_x : 벡터 $\mathbf{A}$ 의 x 방향 성분



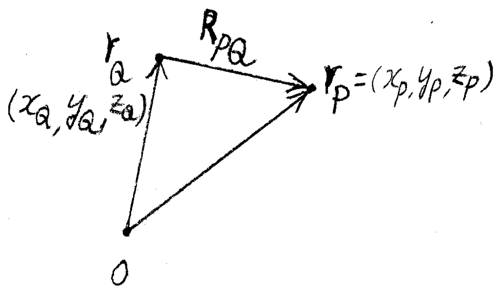
(a)

거리 벡터 (range vector)

$\mathbf{r}_P = (x_P, y_P, z_P)$, $\mathbf{r}_Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$

점 Q 에서 점 P 로 향하는 벡터 (= 점 Q 와 점 P 사이의 거리벡터)

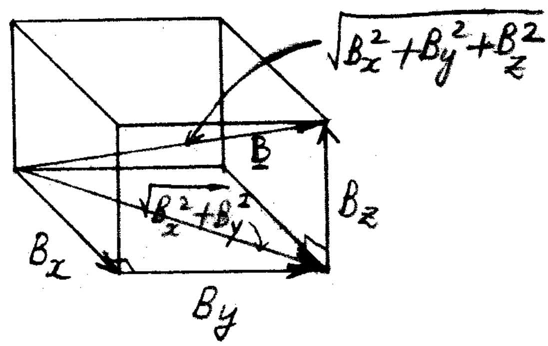
$\boxed{\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = (x_P - x_Q, y_P - y_Q, z_P - z_Q)}$



1.4 성분을 이용한 벡터 계산

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$$



$$\boxed{|\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^{\,2} + B_y^{\,2} + B_z^{\,2}}}$$: 벡터의 크기

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{B_x^{\,2} + B_y^{\,2} + B_z^{\,2}}} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$: 단위 벡터

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y - B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z - B_z)\hat{\mathbf{z}}$$

$$k\mathbf{A} = kA_x \hat{\mathbf{x}} + kA_y \hat{\mathbf{y}} + kA_z \hat{\mathbf{z}}$$

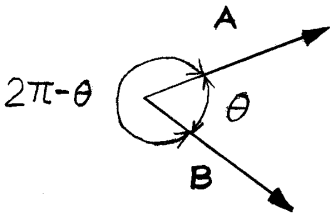
1.5 벡터장

위치에 따라 값이 변하는 벡터함수를 벡터장(vector field)라 한다. 위치에 따른 풍속, 전기장 세기, 자기장 세기 등 이 벡터장의 예이다.

1.6 내적

<u>내적의 정의</u>

$$\boxed{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB\cos(2\pi - \theta) = AB\cos\theta}$$



내적 = dot product = inner product = scalar product

<u>내적의 계산</u>

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \ ; \ \mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

$$\mathbf{A} \bullet k\mathbf{B} = k\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A}$$

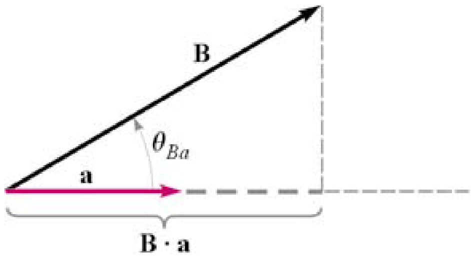
$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0 \rightarrow$ 벡터 $\mathbf{A}$ 와 벡터 $\mathbf{B}$ 는 직각 (orthogonal)

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = A^2$$

내적을 이용한 벡터의 성분 계산

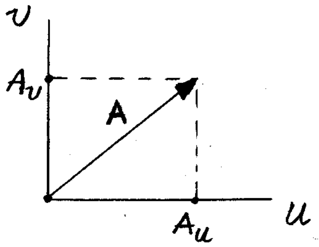
벡터 **B** 의 벡터 **A** 방향 성분 = 투영 (projection)

$$\boxed{\mathbf{B}\bullet\hat{\mathbf{A}} = B\cos\theta_{BA}} :$$



서로 직교하는 임의의 두 방향 $\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}}$ 으로 벡터 **A** 를 분해하면

$$\boxed{\mathbf{A} = (\mathbf{A}\bullet\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{A}\bullet\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} = A_u\,\hat{\mathbf{u}} + A_v\,\hat{\mathbf{v}}}$$



여기서 세 벡터 $\mathbf{A},\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}}$ 는 동일 평면에 있어야 한다.

A_u : 벡터 **A** 의 u 방향 성분

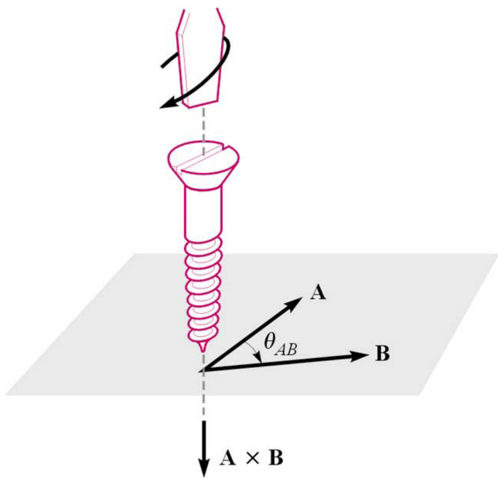
A_v : 벡터 **A** 의 u 방향과 직각 방향 성분

1.7 외적

외적의 정의

외적 = cross product = vector product

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{N}}AB\sin\theta_{AB} = -\hat{\mathbf{N}}AB\sin(2\pi-\theta_{AB})}$$



$\hat{\mathbf{N}}$: 벡터 **A** 를 벡터 **B** 방향으로 회전시킬 때

오른 나사(screw)가 진행하는 방향

θ_{AB} : 벡터 **A** 를 벡터 **B** 방향으로 회전시킬 때 회전각

외적의 계산

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}\ ;\ \mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \left(A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}\right)\times\left(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}\right)\\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$$

$$\mathbf{A}\times k\mathbf{B} = k\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0\rightarrow\mathbf{A}\parallel\mathbf{B}$: 두 벡터는 서로 평행

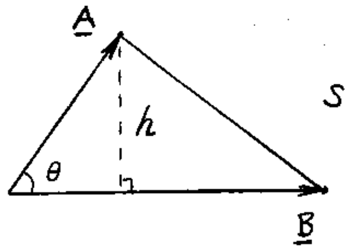
<u>외적을 이용한 두 벡터에 수직인 벡터 계산</u>

$$\boxed{\hat{\mathbf{N}}=\pm\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}}$$

<u>외적의 응용</u>

- 삼각형의 면적 :

$$S=\frac{1}{2}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$$

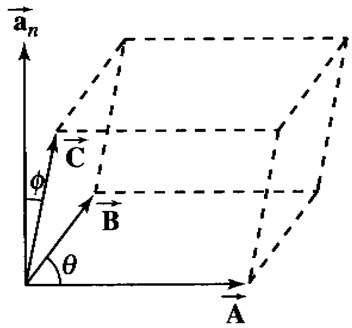


$$S=\frac{1}{2}Bh=\frac{1}{2}BA\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}|\underline{A}\times\underline{B}|$$

- 평행육면체의 체적

$$V=|A(B\sin\theta)|\,|C\cos\phi|=|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|\,|C\cos\phi|$$

$$V=|(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\bullet\mathbf{C}|$$



- Scalar triple product

$$\mathbf{C}\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\bullet(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$$

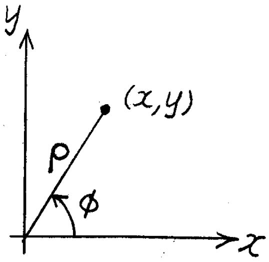
$$\mathbf{C}\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\begin{vmatrix}C_x & C_y & C_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

1.8 원통 좌표계

<u>극좌표 (polar coordinate)</u>

$\boxed{(\rho,\phi)}$: $\rho\geq 0,\ 0\leq\phi\leq 2\pi$ or $-\pi\leq\phi\leq\pi$

(예제) 직각 좌표계로 나타낸 점 (2,3)를 극좌표계로 나타내어라.

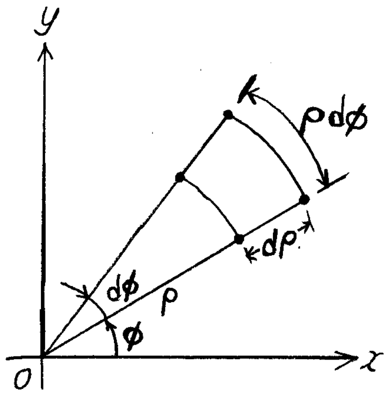


<u>극좌표와 직각좌표의 관계</u>

$$\boxed{\begin{array}{l}x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi\\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \phi=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\end{array}}$$

극좌표와 복소수

$$\boxed{z = x + j\,y = \rho\, e^{j\phi} = \rho\cos\phi + j\rho\sin\phi}$$



극좌표에서의 극소길이와 극소면적

$$\boxed{dL_\rho = d\rho \;,\; dL_\phi = \rho\, d\phi}$$

$$\boxed{dS = dL_\rho \times dL_\phi = \rho\, d\rho\, d\phi}$$

원통좌표계 (cylindrical coordinate system)

- 좌표면 :

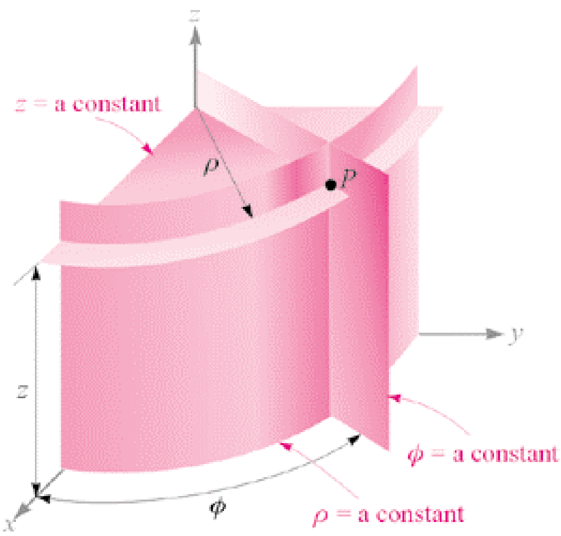
  $\rho = \text{const}$ 면 : 중심이 z 축과 일치하며 반경이 ρ 인 원통면

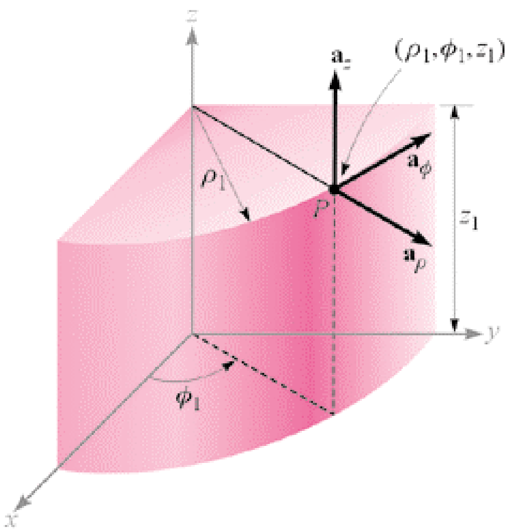
  $\phi = \text{const}$ 면 : zx 평면을 y 축 방향으로 ϕ 만큼 회전한 면

  $z =$ const 면 : xy 평면을 z 축 방향으로 z 만큼 이동한 면

- 좌표축 : $\boxed{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\mathbf{z}}}$ = 원통좌표계의 기본벡터 (좌표축)

- 좌표점 : $\boxed{(\rho, \phi, z)}$, $\rho \geq 0,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi, |z| < \infty$: 원통좌표계로 나타 낸 점의 좌표





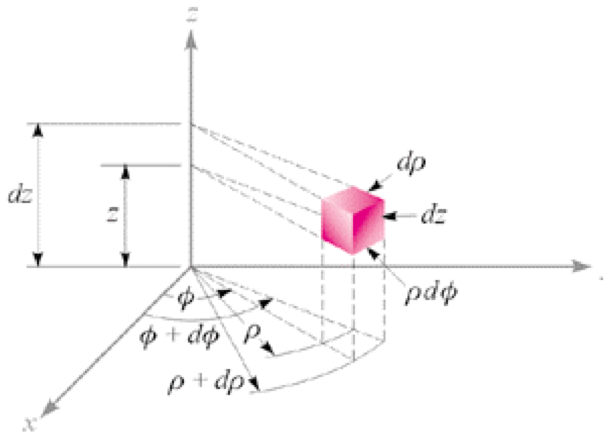
원통좌표계에서의 극소변화량

$$P(\rho, \phi, z),\;\; Q(\rho + d\rho, \phi + d\phi, z + dz)$$

$$dL_\rho = h_1 du_1 = d\rho$$

$$dL_\phi = h_2 du_2 = \rho\, d\phi$$

$$dL_z = h_3 du_3 = dz$$

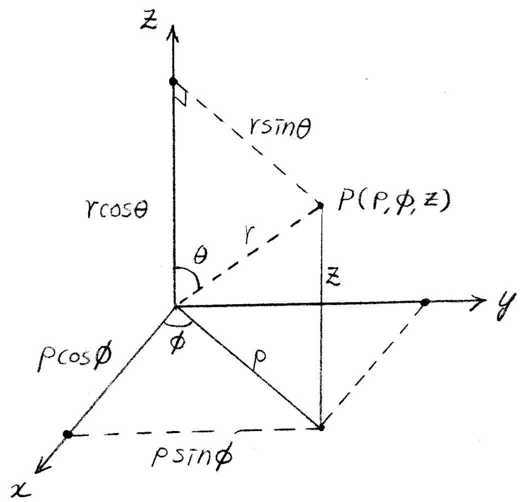


$$\boxed{dL = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\phi)^2 + (dz)^2}}$$ ： 극소 선분길이

$$\boxed{\begin{aligned} dS_\rho &= dL_\phi dL_z = \rho\, d\phi\, dz \\ dS_\phi &= dL_z dL_\rho = dz\, d\rho \\ dS_z &= dL_\rho dL_\phi = \rho\, d\rho\, d\phi \end{aligned}}$$ ： 극소 면적

$$\boxed{dV = dL_\rho dL_\phi dL_z = d\rho \times \rho d\phi \times dz = \rho d\rho d\phi dz}$$ ： 극소 체적

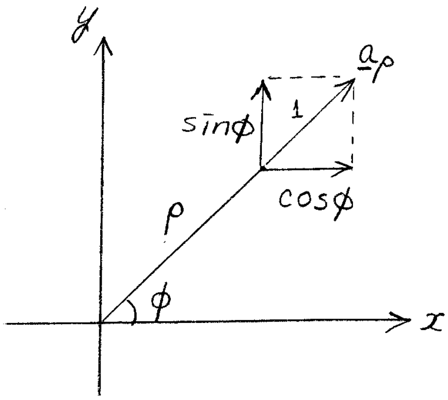
<u>원통좌표와 직각좌표의 상호변환</u>

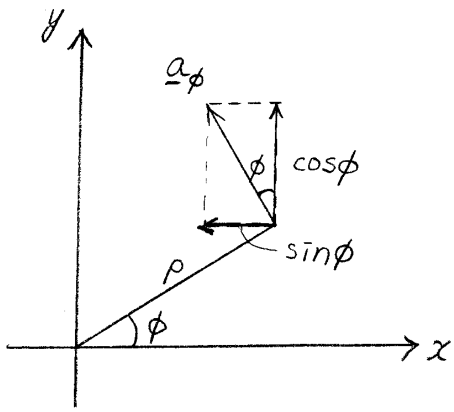


$$\boxed{x = \rho\cos\phi\ ,\ \ y = \rho\sin\phi\ ,\ \ z = z}$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \ \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}\ ,\ \ z = z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}} &= \hat{\mathbf{x}}\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\phi \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{x}}\sin\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\phi \\ \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}}$$





1. 9 구좌표계(Spherical Coordinate System)

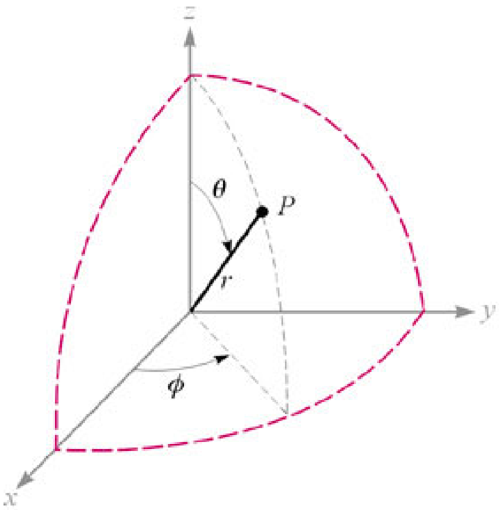
<u>구좌표계의 정의</u>

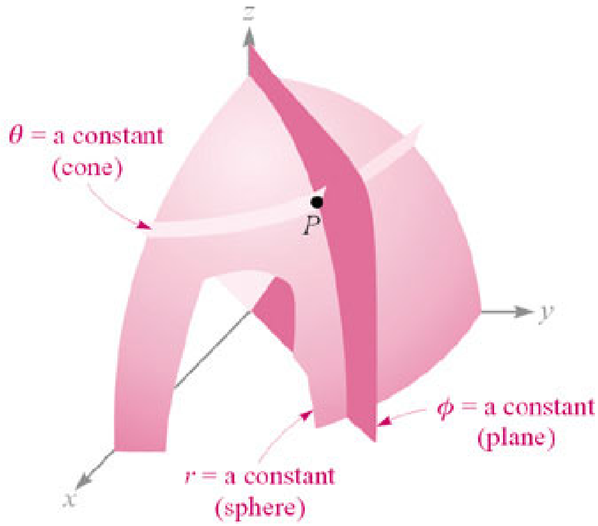
- 좌표면 :

$r = \text{const}$ 면 : 중심이 원점이며 반경이 r 인 구면

$\theta = \text{const}$ 면 : 중심이 z 축이며 중심축으로부터 표면까지의 각도가 θ 인 원뿔면

$\phi = \text{const}$ 면 : zx 평면을 y 축 방향으로 ϕ 만큼 회전한 면





- 좌표축 : $\boxed{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}}$ = 구좌표계의 기본벡터 (좌표축)
- 좌표점 : $\boxed{(r, \theta, \phi)}$, $r \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi$: 구좌표계로 나타 낸 점의 좌표

<u>구좌표계에서의 극소변화량</u>

$$dL_r = h_1 du_1 = dr$$

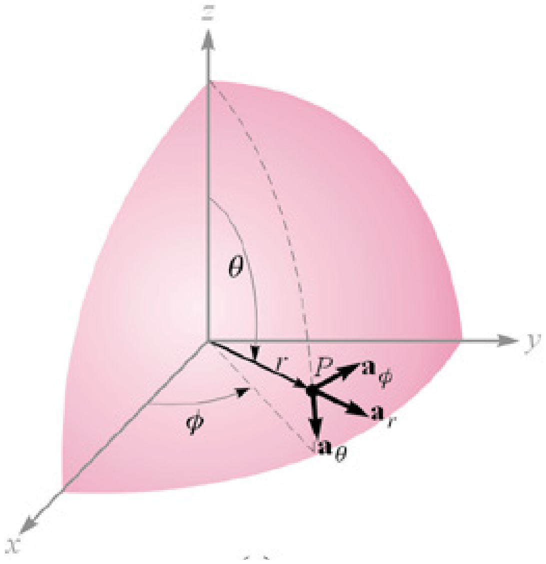
$$dL_\theta = h_2 du_2 = r\,d\theta$$

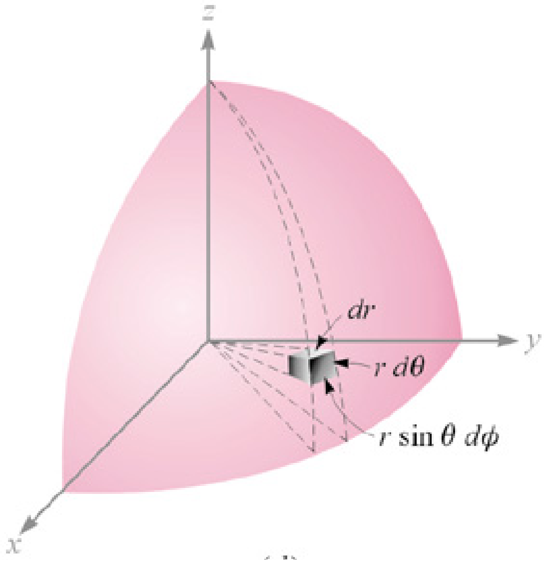
$$dL_z = h_3 du_3 = r\sin\theta d\phi$$

$$\boxed{dL_r = dr,\ dL_\theta = rd\theta,\ dL_\phi = r\sin\theta d\phi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} dS_r &= dL_\theta dL_\phi = rd\theta \times r\sin\theta d\phi = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \\ dS_\theta &= dL_\phi dL_r = r\sin\theta d\phi \times dr = r\sin\theta\, d\phi\, dr \\ dS_\phi &= dL_r dL_\theta = dr \times rd\theta = rdrd\theta \end{aligned}}$$

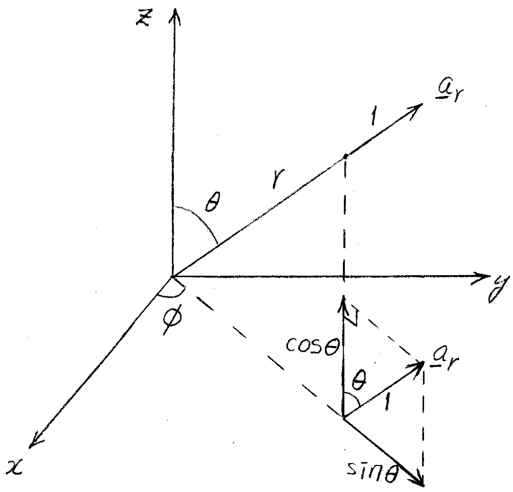
$$\boxed{dV = dL_r dL_\theta dL_\phi = dr \times rd\theta \times r\sin\theta d\phi = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi}$$





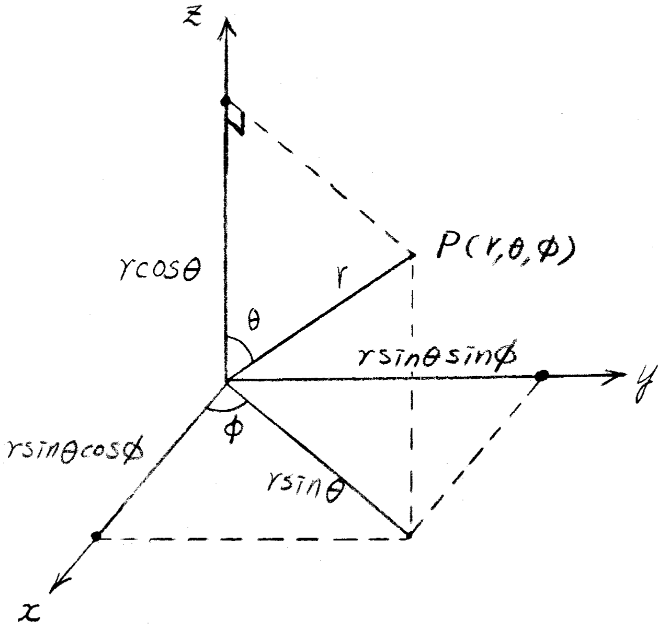
<u>구좌표계와 직각좌표계의 상호변환</u>

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\,\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\,\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}}$$

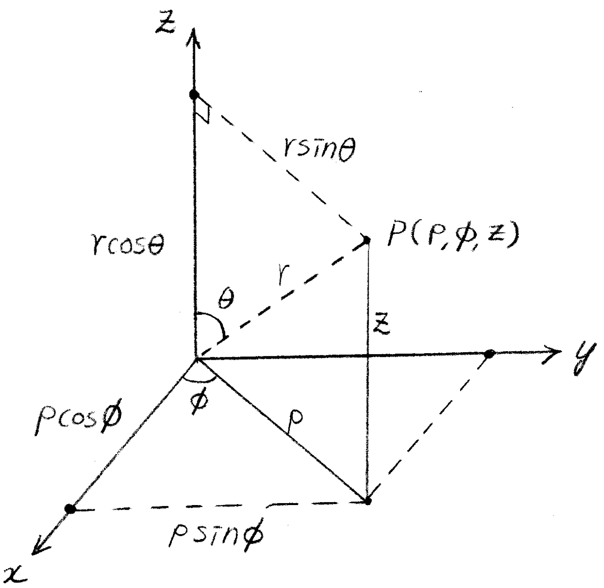
$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\mathbf{x}}\cos\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\sin\phi - \hat{\mathbf{z}}\sin\theta \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{x}}\sin\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\phi \end{aligned}}$$



원통좌표계와 구좌표계와의 관계

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta &= \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ \phi &= \phi \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= r\sin\theta \\ \phi &= \phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$



벡터의 좌표계 변환

$$\mathbf{A}(r,\theta,\phi) = A_r(r,\theta,\phi)\,\mathbf{a}_r + A_\theta(r,\theta,\phi)\,\mathbf{a}_\theta + A_\phi(r,\theta,\phi)\,\mathbf{a}_\phi \qquad ①$$

를 (r_0,θ_0,ϕ_0) 에서

$$\mathbf{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\,\mathbf{a}_x + A_y(x,y,z)\,\mathbf{a}_y + A_z(x,y,z)\,\mathbf{a}_z \qquad ②$$

로 변환하자.

우선 구좌표계로 나타낸 점 (r_0,θ_0,ϕ_0) 을 직교좌표계의 점 (x_0,y_0,z_0) 으로 나타낸다.

$$r_0 = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2}$$

$$\theta_0 = \cos^{-1}\frac{z_0}{\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2}} \qquad ③$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}\frac{y_0}{x_0}$$

점 (r_0,θ_0,ϕ_0) 에서 구좌표계의 단위벡터 $(\mathbf{a}_r,\mathbf{a}_\theta,\mathbf{a}_\phi)$ 를 직각좌표계의 단위벡터 $(\mathbf{a}_x,\mathbf{a}_y,\mathbf{a}_z)$ 로 나타낸다.

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_x \sin\theta_0\cos\phi_0 + \mathbf{a}_y\sin\theta_0\sin\phi_0 + \mathbf{a}_z\cos\theta_0$$

$$\mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_x \cos\theta_0\cos\phi_0 + \mathbf{a}_y\cos\theta_0\sin\phi_0 - \mathbf{a}_z\sin\theta_0 \qquad ④$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x\sin\phi_0 + \mathbf{a}_y\cos\phi_0$$

식 ③과 ④를 식 ①에 대입하여 식 ②를 얻는다.